Correction partielle
TD n° 14

Exercice n°7 : Cavité électromagnétique à miroirs suspendus

1) a) Sur le miroir M' : annulation de $\vec{E}_{II}(x_0,t) = \vec{E}_+(x_0,t) + \vec{\underline{E}}(x_0,t) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_+(x_0,t) = \underline{E}_{0+}\, e^{j(\omega t - kx_0)} + \underline{E}_0\, e^{j(\omega t + kx_0)} = \vec{0} \quad \forall t$$

soit $\underline{E}_{0-} = -\underline{E}_{0+}\, e^{-2jkx_0}$

En utilisant la relation donnée en énoncé : $E_{0+} = \underline{t}\, \underline{E}_0 + \underline{r}\, \underline{E}_{0-}$

donc $E_{0+} = \underline{t}\, \underline{E}_0 - \underline{r}\, \underline{E}_{0+}\, e^{-2jkx_0}$

soit $$\boxed{\frac{\underline{E}_{0+}}{\underline{E}_0} = \frac{\underline{t}}{1 + \underline{r}\, e^{-2jkx_0}}}$$

b) Rappel cours : puissance lumineuse $P_{OPPM} = \| \langle \vec{R} \rangle_t S \| = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} S$

donc $\langle P_+ \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} |\underline{E}_{0+}|^2 S$

Ainsi le "gain" s'écrit $$G = \frac{\langle P_+ \rangle}{\langle P_0 \rangle} = \frac{|\underline{E}_{0+}|^2}{|\underline{E}_0|^2}$$

$$= \frac{|\underline{t}|^2}{(1 + \underline{r}\, e^{-2jkx_0})(1 + \underline{r}^*\, e^{2jkx_0})}$$

Posons $\underline{r} = |\underline{r}|\, e^{j\varphi}$: $G = \frac{|\underline{t}|^2}{1 + |\underline{r}|^2 + 2|\underline{r}| \cos(2kx_0 + \varphi)}$

hypothèse d'énoncé : $\underline{r}$ réel négatif donc $\varphi = \pi$

donc $$\boxed{G = \frac{|\underline{t}|^2}{1 + |\underline{r}|^2 - 2|\underline{r}| \cos(2kx_0)}}$$

Relation de passage : (pour $\vec{B}$)

$$\vec{B}(x_0^-) - \underbrace{\vec{B}(x_0^+)}_{= \vec{0} \text{ car dans conducteur parfait.}} = \mu_0 \, \underline{\vec{j}_S} \wedge (-\vec{e_x})$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{B}_+}(x_0^-) + \underline{\vec{B}_-}(x_0^+) = \mu_0 \, \underline{\vec{j}_S} \wedge (-\vec{e_x})$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{E_{0+}}}{c} e^{j\omega t}\left(e^{-jkx_0} + e^{-jkx_0}\right) \underbrace{\vec{e_y}}_{= \vec{e_y} \wedge (-\vec{e_x})} = \mu_0 \, \underline{\vec{j}_S} \wedge (-\vec{e_x})$$

Par identification : $\underline{\vec{j}_S} = \dfrac{2\underline{E_{0+}}}{\mu_0 c} e^{j\omega t} e^{-jkx_0} \vec{e_y}$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\vec{j}_S} = \frac{2\underline{E_{0+}}}{\mu_0 c} e^{j(\omega t - kx_0)} \vec{e_y}}$$

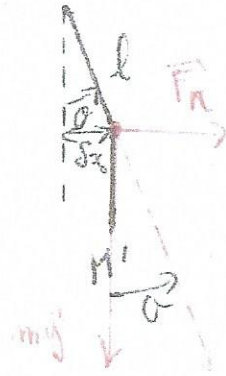
$$\langle \vec{F_r} \rangle = \frac{1}{2} \iint_{M'} \langle \vec{j_S} \wedge \vec{B} \rangle \cdot d\vec{S} \quad \text{or} \quad \langle \vec{j_S} \wedge \vec{B} \rangle = \frac{1}{2} R_e\left[\underline{\vec{j}_S} \wedge \underline{\vec{B}}^*\right]$$

$$\begin{cases} \underline{\vec{j}_S} = \dfrac{2\underline{E_{0+}}}{\mu_0 c} e^{j(\omega t - kx)} \vec{e_y} \\ \underline{\vec{B}} = \dfrac{2\underline{E_{0+}}}{c} e^{j(\omega t - kx)} \vec{e_y} \end{cases} \Rightarrow \langle \vec{j_S} \wedge \vec{B} \rangle = \frac{2E_{0+}^2}{\mu_0 c^2} \vec{e_x}$$

$$\text{donc} \quad \langle \vec{j_S} \wedge \vec{B} \rangle = \frac{4}{c} \underbrace{\frac{E_{0+}^2}{2\mu_0 c}}_{= \langle P_+ \rangle} = \frac{4}{c} \langle P_+ \rangle$$

$$\text{donc} \quad \langle \vec{F_r} \rangle = \frac{1}{2} \frac{4}{c} \langle P_+ \rangle \times S_{M'} \vec{e_x} \Rightarrow \boxed{\langle \vec{F_r} \rangle = \frac{2}{c} \langle P_+ \rangle}$$

Cette force provoque le déplacement δx_0 horizontal (faible) du miroir et l'inclinaison du fil



$$\tan\theta \simeq \theta \simeq \frac{\|\langle \vec{F}_R \rangle\|}{\|m\vec{g}\|} \simeq \frac{\delta x_0}{l}$$

$$\text{soit} \quad \boxed{\delta x_0 = l \, \frac{\|\langle \vec{F}_R \rangle\|}{mg} = \frac{2l}{mgc} \langle P_t \rangle}$$